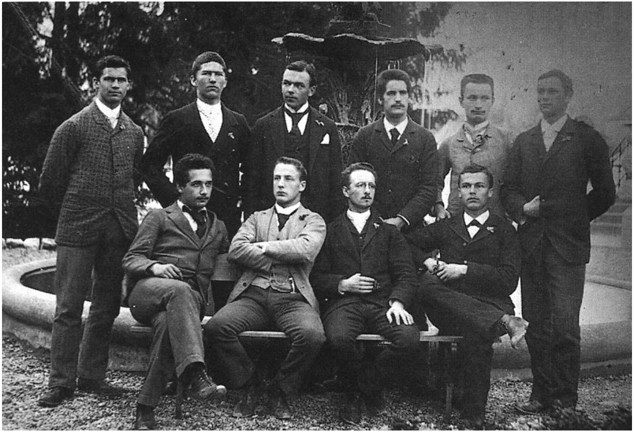
– Laufen im weglosen Gelände – zur Genesis der ART

Domenico Giulini

ZARM Bremen

Leibniz Universität Hannover

100 Jahre Allgemeine Relativitätstheorie
ETH Zürich, 13. November 2015



„An der Aargauischen Kantonsschule wehte in den 90er Jahren ein scharfer Wind der Skepsis, worauf schon die Tatsache hindeutet, daß aus meiner Klasse, so wenig als aus den zwei nächsten, kein Theologe hervorging. In diese Atmosphäre paßte der kecke Schwabe nicht übel, dessen originelle Selbstherrlichkeit ihn schon vor allen anderen auszeichnete“. (Hans Byland, Mitschüler)

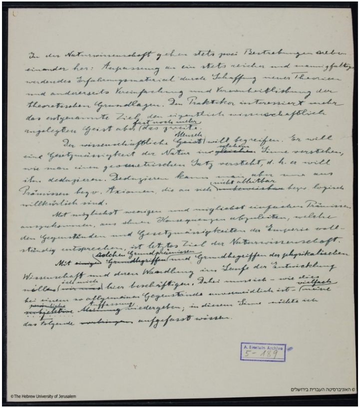
„Die angestrengte geistige Arbeit und das Anschauen von Gottes Natur sind die Engel, welche mich versöhnend, stärkend und doch unerbittlich streng durch die Wirren dieses Lebens führen werden“

A.E. an Pauline Winteler (Mamerl), Mai 1897

Familie Winteler um 1900

Marie, Maja Einstein, Paul, Anna, Jost, Pauline (Mamerl), Rosa

Einstein 1931: Sinn und Ziel der Wissenschaft

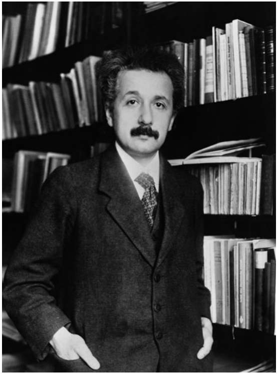


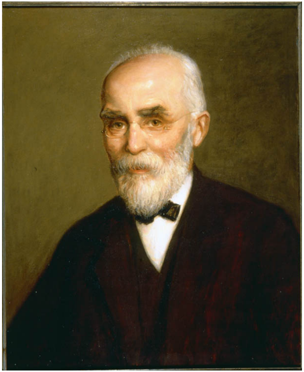
- „In der Naturwissenschaft gehen stets zwei Bestrebungen nebeneinander her: Anpassung an ein stets reicher und mannigfaltiger werdendes Erfahrungsmaterial durch Schaffung neuer Theorien und andererseits Vereinfachung und Vereinheitlichung der theoretischen Grundlagen. Den Praktiker interessiert mehr das erstgenannte Ziel, den eigentlich wissenschaftlich angelegten Geist aber fast noch mehr das zweite."
- „Der wissenschaftliche Mensch (Geist) will begreifen. Er will eine Gesetzmässigkeit der Natur in solchem Sinne verstehen, wie man einen geometrischen Satz versteht, d.h. er will ihn deduzieren. Deduzieren kann man aber nur aus Prämissen bzw. Axiomen, die an sich nicht ableitbar bzw. logisch willkürlich sind."
- „Mit möglichst wenigen und möglichst einfachen Prämissen auszukommen, aus ihnen Konsequenzen abzuleiten, welche den Gegenständen und Gesetzmässigkeiten der Empirie vollständig entsprechen, ist letztes Ziel der Naturwissenschaft."

Max Born: „Physics and Relativity" (Bern 1955)

„Die Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie erschien mir damals und erscheint mir auch heute noch als die größte Leistung menschlichen Denkens über die Natur, die erstaunlichste Vereinigung von philosophischer Tiefe, physikalischer Intuition und mathematischer Kunst. Aber sie hatte damals wenig Zusammenhang mit empirischen Tatsachen. Sie zog mich an wie ein Kunstwerk, an dem man sich ergötzt und das man bewundert - aus gehöriger Entfernung."

Einstein an H.A. Lorentz am 17.1.1916





„Die Serie meiner Gravitationsarbeiten ist eine Kette von Irrwegen, die aber doch allmählich dem Ziele näher führten. Daher sind nun endlich die Grundformeln gut, aber die Ableitungen abscheulich; dieser Mangel muss noch behoben werden.“

Das Ende von Einsteins Gibson Lecture (1933)

„‘Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfasst es ohne zu große Mühe. Aber das ahnungsvolle, Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Wahrheit, das kennt nur, wer es selber erlebt hat.“

1905 B-CH
1) *„Zur Elektrodynamik bewegter Körper“.* (SRT)
2) *„Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?“*

1907 B-CH
3) *„Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie“.* Spannungen - auch elektrostatische - tragen zur trägen Masse bei.
4) *„Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“.* Erster großer Übersichtsartikel; endet mit erster versuchsweiser Erweiterung des Relativitätsprinzips auf gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme.

1911 Z-CH
5) *„Die Relativitäts-Theorie“.* Abschiedsvorlesung am 16.01.11 vor der Naturforschenden Ges. in Zürich; u.a. ‘Zwillingsparadoxon’ als unabweisbare Konsequenz.
6) *„Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichts“.* Ableitung des (halben) Ablenkwinkels auf Grundlage des Äquivalenzprinzips.

1912 P-Cz
7) *„Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes“* und *„Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes“.* Nichtlineare Erweiterung der Newtonschen Feldgleichungen.
8) *„Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?“.* Argumentiert, dass sich die träge Masse bei Anwesenheit umgebender schwerer Massen erhöht (→ „Machsches Prinzip“).

1913 Z-CH
9) *„Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“.* Argumentiert gegen skalare Theorie und kommt Prinzip der allg. Kovarianz sehr nahe. Kurz danach zurückgenommen; große Verwirrung (Lochbetrachtung). Hilfe von Grossmann und Besso (Manuskript: Merkurperiheldrehung).
10) *„Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems“.* Vortrag vom 23.9.1913 auf der 85. Naturforscherversammlung in Wien.
11) Zürcher Notizbuch

1915 B-D
12) Die vier Novemberarbeiten: 4. „Zur ART“, 11. „Addendum“, 18. „Merkurperihel“, 25. „Feldgleichungen“.

1916 B-D
13) „Die Grundlagen der ART“. Erste zusammenfassende Gesamtdarstellung.

1905 B-CH 1) *„Zur Elektrodynamik bewegter Körper“.* (SRT)
2) *„Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?“*

1907 B-CH 3) *„Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie“.* Spannungen - auch elektrostatische - tragen zur trägen Masse bei.
4) *„Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“.* Erster großer Übersichtsartikel; endet mit erster versuchsweiser Erweiterung des Relativitätsprinzips auf gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme.

1911 Z-CH 5) *„Die Relativitäts-Theorie“.* Abschiedsvorlesung am 16.01.11 vor der Naturforschenden Ges. in Zürich; u.a. 'Zwillingsparadoxon' als unabweisbare Konsequenz.
6) *„Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichts“.* Ableitung des (halben) Ablenkwinkels auf Grundlage des Äquivalenzprinzips.

1912 P-Cz 7) *„Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes“* und *„Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes“.* Nichtlineare Erweiterung der Newtonschen Feldgleichungen.
8) *„Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?“.* Argumentiert, dass sich die träge Masse bei Anwesenheit umgebender schwerer Massen erhöht (→ „Machsches Prinzip“).

1913 Z-CH 9) *„Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“.* Argumentiert gegen skalare Theorie und kommt Prinzip der allg. Kovarianz sehr nahe. Kurz danach zurückgenommen; große Verwirrung (Lochbetrachtung). Hilfe von Grossmann und Besso (Manuskript: Merkurperiheldrehung).
10) *„Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems“.* Vortrag vom 23.9.1913 auf der 85. Naturforscherversammlung in Wien.
11) Zürcher Notizbuch

1915 B-D 12) Die vier Novemberarbeiten: 4. „Zur ART“, 11. „Addendum“, 18. „Merkurperihel“, 25. „Feldgleichungen“.

1916 B-D 13) „Die Grundlagen der ART“. Erste zusammenfassende Gesamtdarstellung.

Relativitätsprinzip („Discorsi“ 1638)

Galileo Galilei (1564-1642)

„Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und anderes fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß tropfen läßt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgend welchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, daß es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füßen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleichweit gelangen. [...] Nun laßt das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet – wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend – bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Die Ursache dieser Übereinstimmung aller Erscheinungen liegt darin, daß die Bewegung des Schiffes allen darin enthaltenen Dingen, auch der Luft, gemeinsam zukommt. Darum sagte ich auch, man solle sich unter Deck begeben, denn oben in der freien Luft, die den Lauf des Schiffes nicht begleitet, würden sich mehr oder weniger deutliche Unterschiede bei einigen der genannten Erscheinungen zeigen.“

Prinzipien der klassischen Mechanik

- **Das Galileisch-Newtonsche Trägheitsgesetz:**
  Es gibt eine ausgezeichnete Klasse von Bezugssystemen (Inertialsysteme) und Zeitmaßen (Inertialzeitskalen). Bezogen auf diese ist die Bewegung kräftefreier Massen stets geradlinig und gleichförmig (in gleichen Zeitabständen werden gleiche Strecken zurückgelegt).
- **Das Galileische Relativitätsprinzip:**
  Zwei identische, abgeschlossene physikalische Systeme, die sich relativ zueinander in gleichförmig geradliniger Bewegung befinden, sind hinsichtlich der an den Einzelsystemen mechanisch messbaren Phänomene ununterscheidbar.
- **Die Galilei-Transformationen:**
  Die mathematische Implementierung des Relativitätsprinzips erfolgt in Inertialkoordinaten durch Galilei Transformationen:

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$
$$t \mapsto t' = t$$

- **Trägheit und Kräfte:**
  Die zur Definition von „Trägheitsbahnen" nötige Struktur (Pfadstruktur) ist fest vorgegeben und nicht dynamisch. Ursachen für Abweichungen von diesen bevorzugten Bahnen sind immmer „Kräfte". Die Gravitation ist eine solche Kraft.

Die entscheidende physikalische Frage

- Gemäß dem Relativitätsprinzip in der Mechanik ist mit *mechanischen* Methoden eine absolute translatorische Geschwindigkeit nicht feststellbar, ganz im Gegensatz zur rotatorischen Bewegung, wie Newtons Versuch mit dem Eimer demonstrieren soll.

  Für die Physik des ausgehenden 19. Jahrhunderts war also die entscheidende Frage:

Gilt das Relativitätsprinzip auch in der Elektrodynamik ?

Die Materievorstellung um 1900

- Der Begriff der *ponderablen* (also 'wägbaren') Materie subsumiert alle uns 'handgreiflich' vertrauten Materieformen, auch die eventuell vorhandenen Atome.
- Daneben gibt es den Äther: Dieser ist eine (hypothetisch postulierte) Substanz als Träger der elektromagnetischen Wellen, so wie Wasser oder Luft Träger der entsprechenden Wellen ist. Lichtwellen entsprechen transversalen Wellen (Polarisierbarkeit) im Äther.
- Der Äther – als elastisches Medium – musste einerseits einem festen Körper hoher Festigkeit gleichen (Transversalwellen, hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit), andererseits aber ponderable Materie ungehindert durchdringen können (etwa Licht in Glas). Keiner wusste, wie das zusammenpassen sollte.

Die Materievorstellung um 1900

- Innerhalb der Äthervorstellung wird die Frage nach der Gültigkeit des Relativitätsprinzips in der Elektrodynamik auf die Frage reduziert, inwieweit der Äther im Inneren bewegter ponderabler Körper an deren Bewegung teilnimmt.
- Würde er vollständig mitgenommen, so wie Luft oder Wasser in vollständig abgedichteten Gefäßen, so gälte auch ein Relativitätsprinzip wie in der Mechanik.
- Würde er hingegen vollständig starr im Raum verharren und durch die bewegten Körper einfach 'hindurchwehen' ($\rightarrow$ Ätherwind), so wäre durch ihn ein absolutes Bezugssystem ausgezeichnet. Beispielsweise wäre dann nur relativ zu *diesem* Bezugssystem die Lichtausbreitung isotrop.
- Negativer Ausgang aller Versuche, den Bewegungszustand relativ zum Äther zu konstatieren führen 1905 zur SRT.

Christie's: „Fine Printed Books and Manuscripts 22 June 2010 New York, Rockefeller Plaza

„Einiges über die Entstehung der Allgemeinen Relativitätstheorie“

George A. Gibson Lecture
Universität Glasgow, 20. Juni 1933

- EINSTEIN, Albert (1879-1955). Autograph manuscript signed (A. Einstein on last page), constituting Einstein's lecture The Origin of the General Theory of Relativity (Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie), delivered as the first George A. Gibson Lecture at the University of Glasgow, 20 June 1933. A working draft with extensive deletions and interlinear additions. No place, undated, but ca. June 1933.
- Lot 195/Sale 2328. Estimate $ 250,000 - $ 350,000
- Price Realized $ 578,500. (Sales totals are hammer price plus buyer's premium and do not reflect costs, financing fees or application of buyer's seller's credits.)

Aus Einsteins Gibson Lecture (1933)

- „Das Einfachste war natürlich, das Laplacesche skalare Potential der Gravitation beizubehalten und die Poissonsche Gleichung durch ein nach der Zeit differenziertes Glied in naheliegender Weise so zu ergänzen, dass der speziellen Relativitätstheorie Genüge geleistet würde. Auch musste das Bewegungsgesetz des Massenpunktes im Gravitationsfeld der speziellen Relativitätstheorie angepasst werden."
- „Solche Untersuchungen führten aber zu einem Ergebnis, das mich im hohem Maße misstrauisch machte. Gemäß der klassischen Mechanik ist nämlich die Vertikalbeschleunigung eines Körpers im vertikalen Schwerefeld von der Horizontalkomponente der Geschwindigkeit unabhängig. Hiermit hängt es zusammen, dass die Vertikalbeschleunigung eines mechanischen Systems bzw. dessen Schwerpunktes unabängig herauskommt von dessen innerer Energie. Nach der von mir versuchten Theorie war aber die Unabhängigkeit [...] nicht vorhanden."
- „Dies passte nicht zur alten Erfahrung, dass die Körper alle dieselbe Beschleunigung in einem Gravitationsfeld erfahren. Dieser Satz, der auch als Satz über die Gleichheit der trägen und schweren Masse formuliert werden kann, leuchtete mir nun in seiner tiefen Bedeutung ein. Ich wunderte mich im höchsten Grade über sein Bestehen und vermutete, dass in ihm der Schlüssel für ein tieferes Verständnis der Trägheit und Gravitation liegen müsse. An seiner strengen Gültigkeit habe ich auch ohne Kenntnis des Resultates der schönen Versuche von Eötvös, die mir – wenn ich mich richtig erinnere – erst später bekannt wurden, nicht ernsthaft gezweifelt."

Theorie einer skalaren Gravitation

- Wir suchen eine speziell-relativistische Verallgemeinerung von

$$\Delta\varphi = 4\pi G\,\rho$$

- Das ist ziemlich eindeutig:

$$\Box\varphi := \left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = -\frac{4\pi G}{c^2}T^\mu_\mu\,.$$

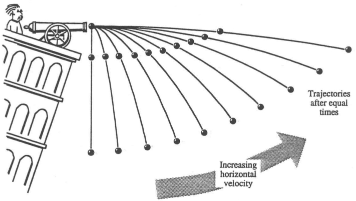
- Wie aber sind die Bahnen von Testteilchen im φ-Feld? Formal konsistent wären Verallgemeinerungen der Form

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = P^{\mu\nu}\partial_\nu F[\phi]$$

mit

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu/c^2$$

Theorie einer skalaren Gravitation



Freier Fall mit variabler Horizontalgeschwindigkeit zu Beginn ($\beta = v/c$).

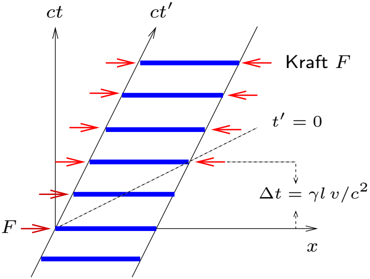
$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\left(1 - \beta^2(t)\right)\vec{\nabla}\phi\left(\vec{x}(t)\right)$$

„Passt nicht zur *alten* Erfahrung … “

$$\begin{aligned}
\tau_h &= \frac{c}{g}\cos^{-1}\Big(\exp\big(-hg/c^2\big)\Big) \;\approx\; \sqrt{2h/g} \\
t_h &= \frac{c}{g}\,\gamma\,\cosh^{-1}\Big(\exp\big(hg/c^2\big)\Big) \;\approx\; \gamma\,\sqrt{2h/g} \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Spannungen werden wägbar (1907)

Ein Stab der Ruhelänge l bewegt sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse relativ zum Koordinatensystem K. In seinem Ruhesystem K' wird er vom Zeitpunkt $t' = 0$ ab mit der Kraft F zusammengedrückt. Die Druckspannung in seinem Inneren beträgt dann $\sigma = F/$Querschnittsfläche.



- Vom System K aus beurteilt bewegt sich der Stab für die Zeit Δt unter der alleinigen Wirkung der Schubkraft F, ohne Gegenkraft. Dabei ändert er seine Geschwindigkeit aber nicht! Aus der Impulserhaltung folgt ein Massezuwachs des unter der Druckspannung σ stehenden Stabes:

$$\Delta p = F\Delta t = F\gamma l\, v/c^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta m = Fl/c^2 = \sigma V/c^2$$

NB: Folgerung in der ART

- Um hydrostatisches Gleichgewicht zu bekommen, muss gemäss der ART der Druck in Richtung kleinerer Radien wie folgt wachsen *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung (1939)*:

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{G}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{4\pi r^3}{3} \cdot \left(\rho + 3p/c^2\right)}_{\text{aktive Masse}} \cdot \underbrace{\left(\rho + p/c^2\right)}_{\text{passive Masse}} \cdot \underbrace{\left(1 - (2GM(r)/c^2 r)\right)^{-1}}_{\text{Geometrie}}$$

- Druck trägt sowohl zur aktiven als auch zur passiven gravitativen Masse bei, was zu Instabilitäten führt. Während Newtonsche Sterne für alle Massen und Radien existieren können, gilt im relativistischen Fall z.B. für homogene Sterne folgende Beschränkung, damit der Druck im Zentrum endlich bleibt:

$$R > \frac{9}{4} \cdot \frac{GM}{c^2}$$

3. *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes; von A. Einstein.*

$$\Delta c = k c \varrho ,$$

1) In einer in kurzem nachfolgender Arbeit wird gezeigt werden, daß die Gleichung (5a) und (5b) noch nicht exakt richtig sein können. In dieser Arbeit sollen sie vorläufig benutzt werden.

Prag, Februar 1912.

(Eingegangen 26. Februar 1912.)

Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes;
von A. Einstein.

$$\Delta c = k\left\{c\,\sigma + \frac{1}{2k}\,\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\right\}$$

- Diese Gleichung können auch aus einer einleuchtenden prinzipiellen Modifikation der Newton'schen Gleichung gefunden werden ($\Rightarrow$ gravitative Wirkung aller Energien, auch der des Gravitationsfeldes selbst). Allerdings liefert sie noch keine korrekten Vorhersagen, z.B. bei der Periheldrehung.

Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes; von A. Einstein.

$$\Delta c = k\left\{c\sigma + \frac{1}{2k}\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\right\}$$

- Diese Gleichung können auch aus einer einleuchtenden prinzipiellen Modifikation der Newton'schen Gleichung gefunden werden ($\Rightarrow$ gravitative Wirkung aller Energien, auch der des Gravitationsfeldes selbst). Allerdings liefert sie noch keine korrekten Vorhersagen, z.B. bei der Periheldrehung.

Die „Entwurf-Arbeit“

ENTWURF EINER
VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE
UND EINER
THEORIE DER GRAVITATION

I. PHYSIKALISCHER TEIL
VON
ALBERT EINSTEIN
IN ZÜRICH

II. MATHEMATISCHER TEIL
VON
MARCEL GROSSMANN
IN ZÜRICH

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

I.
Physikalischer Teil.

Von Albert Einstein.

Die im folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundamente der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten[1]) suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, daß ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte; dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich läßt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfelde befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrecht erhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).

Daß das Gesetz der Proportionalität der trägen und der schweren Masse jedenfalls mit außerordentlicher Genauigkeit erfüllt ist, wissen wir aus einer fundamental wichtigen Untersuchung von Eötvös[2]), die auf folgender Überlegung beruht. Auf einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper wirkt sowohl die Schwere als auch die von der Drehung der Erde herrührende Zentrifugalkraft. Die erste dieser Kräfte ist proportional der schweren, die zweite der trägen Masse. Die Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte, d. h. die Richtung der scheinbaren Schwerkraft (Lotrichtung) müßte also von der physikalischen Natur des ins Auge gefaßten Körpers abhängen, falls die Proportionalität der trägen und schweren Masse nicht erfüllt wäre. Es ließen sich dann die scheinbaren Schwerkräfte, welche auf Teile eines heterogenen starren Systems wirken, im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; es bliebe vielmehr im allgemeinen ein Drehmoment der scheinbaren

1) A. Einstein, Ann. d. Physik 4. 35. S. 898; 4. 38. S. 355; 4. 38. S. 443.
2) B. Eötvös, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII 1890. Wiedemann, Beiblätter XV. S. 688 (1891).

Die „Entwurf-Arbeit“

Schwerkräfte übrig, das sich beim Aufhängen des Systems an einem torsionsfreien Faden hätte bemerkbar machen müssen. Indem Eötvös die Abwesenheit solcher Drehmomente mit großer Sorgfalt feststellte, bewies er, daß das Verhältnis beider Massen für die von ihm untersuchten Körper mit solcher Genauigkeit von der Natur des Körpers unabhängig war, daß die relativen Unterschiede die dies Verhältnis von Stoff zu Stoff noch besitzen könnte, kleiner als ein Zwanzigmilliontel sein müßte.

Beim Zerfall radioaktiver Stoffe werden so bedeutende Energiemengen abgegeben, daß die Änderung der trägen Masse des Systems, welche nach der Relativitätstheorie jener Energieabnahme entspricht, gegenüber der Gesamtmasse nicht sehr klein ist.[1]) Beim Zerfall von Radium beträgt z. B. jene Abnahme $\frac{1}{10000}$ der Gesamtmasse. Würden jenen Änderungen der trägen Masse nicht Änderungen der schweren Masse entsprechen, so müßten Abweichungen der trägen von der schweren Masse bestehen, die weit größer sind, als es die Eötvösschen Versuche zulassen. Es muß also als sehr wahrscheinlich betrachtet werden, daß die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist. Aus diesen Gründen scheint mir auch die Äquivalenzhypothese, welche die physikalische Wesengleichheit der schweren mit der trägen Masse ausspricht, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu besitzen.[2])

§ 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerefeld.

Gemäß der gewöhnlichen Relativitätstheorie[3]) bewegt sich ein kräftefrei bewegter Punkt nach der Gleichung

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2}\right\} = 0. \tag{1}$$

Denn es besagt diese Gleichung nichts anderes, als daß sich der materielle Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Es ist dies die Bewegungsgleichung in Form des Hamiltonschen Prinzipes; denn wir können auch setzen

$$\delta\left\{\int H\,dt\right\} = 0, \tag{1a}$$

wobei

$$H = -\frac{ds}{dt}\,m$$

1) Die Abnahme der trägen Masse, die der abgegebenen Energie E entspricht, ist bekanntlich $\frac{E}{c^2}$, wenn mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet wird.

2) Vgl. auch § 7 dieser Arbeit.

3) Vgl. M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1906. S. 136.

Bei gegebener Geschwindigkeit sind also Impuls und kinetische Energie der Größe c umgekehrt proportional; anders ausgedrückt: Die träge Masse, so wie sie in Impuls und Energie eingeht, ist $\frac{m}{c}$, wobei m eine für den Massenpunkt charakteristische, vom Gravitationspotential unabhängige Konstante bedeutet. Es paßt dies zu Machs kühnem Gedanken, daß die Trägheit in einer Wechselwirkung des betrachteten Massenpunktes mit allen übrigen ihren Ursprung habe; denn häufen wir Massen in der Nähe des betrachteten Massenpunktes an, so verkleinern wir damit das Gravitationspotential c, erhöhen also die für die Trägheit maßgebende Größe $\frac{m}{c}$.

§ 2. Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerefeld. Charakterisierung des letzteren.

Mit der Einführung einer räumlichen Veränderlichkeit der Größe c haben wir den Rahmen der gegenwärtig als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie durchbrochen; denn es verhält sich nun der mit ds bezeichnete Ausdruck orthogo nalenlinearen Transformationen der Koordinaten gegenüber nicht mehr als Invariante. Soll also — woran nicht zu zweifeln ist — das Relativitätsprinzip aufrecht erhalten werden, so müssen wir die Relativitätstheorie derart verallgemeinern, daß sie die im vorigen in ihren Elementen angedeutete Theorie des statischen Schwerefeldes als Spezialfall enthält.

Führen wir ein neues Raum-Zeitsystem $K'(x', y', z', t')$ ein durch irgend eine Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t'(x, y, z, t), \end{aligned}$$

und war das Schwerefeld im ursprünglichen System K ein statisches, so geht bei dieser Substitution die Gleichung (1) in eine Gleichung von der Form

$$\delta\left\{\int ds'\right\} = 0$$

über, wobei

$$ds'^2 = g_{11}\,dx'^2 + g_{22}\,dy'^2 + \ldots + 2g_{12}\,dx'\,dy' + \ldots$$

gesetzt ist, und die Größen $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x', y', z', t' sind. Setzen wir x_1, x_2, x_3, x_4 statt x', y', z', t' und schreiben wir wieder ds statt ds', so erhalten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in bezug auf K' die Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\left\{\int ds\right\} = 0, \quad \text{wobei} \\ &ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu. \end{aligned}\right. \tag{1''}$$

Die „Entwurf-Arbeit“

Zunächst können wir aus der Bedeutung, welche ds im Bewegungsgesetz des materiellen Punktes spielt, den Schluß ziehen, daß ds eine absolute Invariante (Skalar) sein muß; hieraus ergibt sich, daß die Größen $g_{\mu\nu}$ einen kovarianten Tensor zweiten Ranges bilden[1]), den wir als den kovarianten Fundamentaltensor bezeichnen. Dieser bestimmt das Schwerefeld. Es ergibt sich ferner aus (7) und (9), daß Impuls und Energie des materiellen Punktes zusammen einen kovarianten Tensor ersten Ranges, d. h. einen kovarianten Vektor bilden.[2])

§ 3. Bedeutung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit.

Aus dem Früheren kann man schon entnehmen, daß zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und den mittelst Maßstäben und Uhren zu erhaltenden Meßergebnissen keine so einfachen Beziehungen bestehen können, wie in der alten Relativitätstheorie. Es ergab sich dies bezüglich der Zeit schon beim statischen Schwerefelde.[3]) Es erhebt sich deshalb die Frage nach der physikalischen Bedeutung (prinzipiellen Meßbarkeit) der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4.

Hierzu bemerken wir, daß ds als invariantes Maß für den Abstand zweier unendlich benachbarter Raumzeitpunkte aufzufassen ist. Es muß daher ds auch eine vom gewählten Bezugssystem unabhängige physikalische Bedeutung zukommen. Wir nehmen an, ds sei der „natürlich gemessene“ Abstand beider Raumzeitpunkte und wollen darunter folgendes verstehen.

Die unmittelbare Nachbarschaft des Punktes (x_1, x_2, x_3, x_4) wird bezüglich des Koordinatensystems durch die infinitesimalen Variabeln dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 bestimmt. Wir denken uns statt dieser durch eine lineare Transformation neue Variable $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ eingeführt, derart, daß

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

wird. Bei dieser Transformation sind die $g_{\mu\nu}$ als Konstanten zu betrachten; der reelle Kegel $ds^2 = 0$ erscheint auf seine Hauptachsen bezogen. In diesem elementaren $d\xi$-System gilt dann die gewöhnliche Relativitätstheorie, und es sei in diesem System die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten dieselbe wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h. ds^2 ist das Quadrat des vierdimensionalen Abstandes beider unendlich benachbarter Raumzeitpunkte, gemessen mittelst eines im $d\xi$-System nicht beschleunigten starren Körpers und mittelst relativ zu diesem ruhend angeordneter Einheitsmaßstäbe und Uhren.

1) Vgl. II. Teil, § 1. 2) Vgl. II. Teil, § 1.
3) Vgl. z. B. A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. S. 903 ff.

Den Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ nennen wir den (kontravarianten) Spannungs-Energietensor der materiellen Strömung. Der Gleichung (10) schreiben wir einen Gültigkeitsbereich zu, der über den speziellen Fall der Strömung inkohärenter Massen weit hinausgeht. Die Gleichung stellt allgemein die Energiebilanz zwischen dem Gravitationsfelde und einem beliebigen materiellen Vorgang dar; nur ist für $\Theta_{\mu\nu}$ der dem jeweilen betrachteten materiellen System entsprechende Spannungs-Energietensor einzusetzen. Die erste Summe in der Gleichung enthält die örtlichen Ableitungen der Spannungen bzw. Energiestromdichte und die zeitlichen Ableitungen der Impuls- bzw. Energiedichte; die zweite Summe ist ein Ausdruck für die Wirkungen, welche vom Schwerefelde auf den materiellen Vorgang übertragen werden.

§ 5. Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes.

Nachdem wir die Impuls-Energiegleichung für die materiellen Vorgänge (mechanische, elektrische und andere Vorgänge) mit bezug auf das Gravitationsfeld aufgestellt haben, bleibt uns noch folgende Aufgabe. Es sei der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ für den materiellen Vorgang gegeben. Welches sind die Differentialgleichungen, welche die Größen g_{ik}, d. h. das Schwerefeld zu bestimmen gestatten? Wir suchen mit anderen Worten die Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi k\varrho.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir keine so vollkommen zwangläufige Methode gefunden, wie für die Lösung des vorhin behandelten Problems. Es war nötig, einige Annahmen einzuführen, deren Richtigkeit zwar plausibel erscheint, aber doch nicht evident ist.

Die gesuchte Verallgemeinerung wird wohl von der Form sein

$$\varkappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}, \tag{11}$$

wo $\varkappa$ eine Konstante, $\Gamma_{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges ist, der durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hervorgeht. Dem Newton-Poissonschen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, daß diese Gleichungen (11) zweiter Ordnung sein sollen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ zu finden, der eine Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist.[1]) A priori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, daß die endgültigen, genauen Gleichungen der Gravitation von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. Es besteht daher immer noch die Möglichkeit, daß die

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 2.

Die „Entwurf-Arbeit"

Wir wenden uns nun unserem Problem wieder zu. Aus Gleichung (10) geht hervor, daß

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu}, \qquad (\sigma=1,2,3,4)$$

der pro Volumeneinheit auf die Materie vom Gravitationsfeld übertragene Impuls (bzw. Energie) ist. Damit der Energie-Impulssatz erfüllt sei, müssen die Differentialausdrücke $\Gamma_{\mu\nu}$ der Fundamentalgrößen $\gamma_{\mu\nu}$, welche in die Gravitationsgleichungen

$$\varkappa\cdot\Theta_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu}$$

eingehen, so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{2\varkappa}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Gamma_{\mu\nu}$$

sich derart umformen läßt, daß er als Summe von Differentialquotienten erscheint. Es ist andererseits bekannt, daß in dem für $\Gamma_{\mu\nu}$ zu suchenden Ausdruck der Term (a) erscheint. Die gesuchte identische Gleichung ist also von folgender Gestalt:

Summe von Differentialquotienten

$$=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)\right.$$

+ weitere Glieder, die bei Bildung der ersten Annäherung wegfallen.}

Hierdurch ist die gesuchte Identität eindeutig bestimmt; bildet man
[30] sie nach dem angedeuteten Verfahren[1]), so erhält man:

$$(12)\begin{cases}\displaystyle\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma}\right)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right)\\ \displaystyle=\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)-\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\varrho}\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta}\right.\\ \displaystyle\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right\}.\end{cases}$$

Der in der geschweiften Klammer der rechten Seite stehende Ausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ ist demnach der von uns gesuchte Tensor, der in die Gravitationsgleichungen

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu}$$

eintritt. Um diese Gleichungen besser überblicken zu können, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$(13)\qquad -2\varkappa\cdot\vartheta_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right).$$

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 3.

Aus der Gleichung (12a) folgt als Ausdruck für den Differentialtensor, der in die Gravitationsgleichungen eingeht

$$(17)\qquad \Gamma_{\mu\nu}=\varDelta_{\mu\nu}(\gamma)-\varkappa\cdot\vartheta_{\mu\nu}.$$

Die Gravitationsgleichungen (11) lauten also

$$(18)\qquad \varDelta_{\mu\nu}(\gamma)=\varkappa(\Theta_{\mu\nu}+\vartheta_{\mu\nu}).$$

Diese Gleichungen erfüllen eine Forderung, die unseres Erachtens an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muß; sie zeigen nämlich, daß der Tensor $\vartheta_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt, wie der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ der materiellen Vorgänge. Eine Ausnahmestellung der Gravitationsenergie gegenüber allen anderen Energiearten würde ja zu unhaltbaren Konsequenzen führen.

Durch Addition der Gleichungen (10) und (12a) findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (18)

$$(19)\qquad \sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}(\Theta_{\mu\nu}+\vartheta_{\mu\nu})\right\}=0. \qquad (\sigma=1,2,3,4)$$

Hieraus ersieht man, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.

Bei der bisher gegebenen Darstellung haben wir die kontravarianten Tensoren bevorzugt, weil sich der kontravariante Spannungsenergietensor der Strömung inkohärenter Massen in besonders einfacher Weise ausdrücken läßt. Indessen können wir die gewonnenen Fundamentalbeziehungen ebenso einfach unter Benutzung kovarianter Tensoren ausdrücken. Statt $\Theta_{\mu\nu}$ haben wir dann $T_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\Theta_{\alpha\beta}$ als Spannungs-Energietensor des materiellen Vorganges zugrunde zu legen. Statt Gleichung (10) erhalten wir durch gliedweise Umformung

$$(20)\qquad \sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu}T_{\mu\sigma})+\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot T_{\mu\nu}=0.$$

Aus dieser Gleichung und (16) folgt, daß die Gleichungen des Gravitationsfeldes auch in der Form

$$(21)\qquad -D_{\mu\nu}(g)=\varkappa(t_{\mu\nu}+T_{\mu\nu})$$

geschrieben werden können, welche Gleichungen auch direkt aus (18) abgeleitet werden können. Analog (19) besteht die Beziehung

$$(22)\qquad \sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\sigma\mu}(T_{\mu\nu}+t_{\mu\nu})\right\}=0.$$

§ 6. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge.

Weil bei jeglichem physikalischen Vorgang Impuls und Energie eine Rolle spielen, diese letzteren aber ihrerseits das Gravitationsfeld

ART Genesis

Einstein
- auf dem Weg
- über die ART

Rückschau
- Relativitätsprinzip
- klassische Mechanik
- Mateiekonzepte

Auf dem Weg
- Gibson Lecture
- skalare Theorie
- Spannungen wiegen
- Prager Arbeiten
- Entwurf-Arbeit
- Zürcher Notizbuch
- der Durchbruch

Vergleich N-E

Schluss

Die „Entwurf-Arbeit“

18 Kovarianz physikalischer Gleichungs-Systeme

bestimmen und von ihm beeinflußt werden, müssen die das Schwerefeld bestimmenden Größen $g_{\mu\nu}$ in allen physikalischen Gleichungssystemen auftreten. So haben wir gesehen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die Gleichung

$$\delta\{\int ds\} = 0$$

bestimmt ist, wobei

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu .$$

ds ist eine Invariante beliebigen Substitutionen gegenüber. Die gesuchten Gleichungen, welche den Ablauf irgend eines physikalischen Vorganges bestimmen, müssen nun so gebaut sein, daß die Invarianz von ds die Kovarianz des betreffenden Gleichungssystems zur Folge hat.

Bei der Verfolgung dieser allgemeinen Aufgaben stoßen wir aber zunächst auf eine prinzipielle Schwierigkeit. Wir wissen nicht, bezüglich welcher Gruppe von Transformationen die gesuchten Gleichungen kovariant sein müssen. Am natürlichsten erscheint es zunächst, zu verlangen, daß die Gleichungssysteme beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sein sollen. Dem steht aber entgegen, daß die von uns aufgestellten Gleichungen des Gravitationsfeldes diese Eigenschaft nicht besitzen. Wir haben für die Gravitationsgleichungen nur beweisen können, daß sie beliebigen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind; wir wissen aber nicht, ob es eine allgemeine Transformationsgruppe gibt, der gegenüber die Gleichungen kovariant sind. Die Frage nach der Existenz einer derartigen Gruppe für das Gleichungssystem (18) bzw. (21) ist die wichtigste, welche sich an die hier gegebenen Ausführungen anknüpft. Jedenfalls sind wir bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie nicht berechtigt, die Kovarianz physikalischer Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern.

Anderseits aber haben wir gesehen, daß sich eine Energie-Impuls-Bilanzgleichung für materielle Vorgänge hat aufstellen lassen (§ 4, Gleichung 10), welche beliebige Transformationen gestattet. Es scheint deshalb doch natürlich, wenn wir voraussetzen, daß alle physikalischen Gleichungssysteme mit Ausschluß der Gravitationsgleichungen so zu formulieren sind, daß sie beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Die diesbezügliche Ausnahmestellung der Gravitationsgleichungen gegenüber allen anderen Systemen hängt nach meiner Meinung damit zusammen, daß nur erstere zweite Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors enthalten dürften.

Die Aufstellung derartiger Gleichungssysteme erfordert die Hilfsmittel der verallgemeinerten Vektoranalysis, wie sie im II. Teil dargestellt ist.

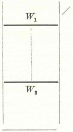
§ 7. Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?

Bei der unleugbaren Kompliziertheit der hier vertretenen Theorie der Gravitation müssen wir uns ernstlich fragen, ob nicht die bisher ausschließlich vertretene Auffassung, nach welcher das Gravitationsfeld auf einen Skalar Φ zurückgeführt wird, die einzig naheliegende und berechtigte sei. Ich will kurz darlegen, warum wir diese Frage verneinen zu müssen glauben.

.....

Für die Strahlung im Vakuum verschwindet bekanntlich der Skalar P. Ist die Strahlung in einem masselosen spiegelnden Kasten eingeschlossen, so erfahren deren Wände Zugspannungen, die bewirken, daß dem System, — als Ganzes genommen — eine schwere Masse $\int P d\tau$ zukommt, die der Energie E der Strahlung entspricht.

Statt nun aber die Strahlung in einen Hohlkasten einzuschließen, denke ich mir dieselbe begrenzt

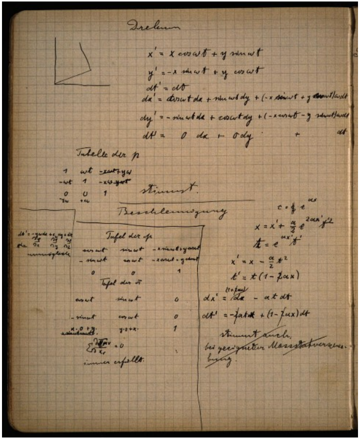


1. durch die spiegelnden Wände eines festangeordneten Schachtes S,
2. durch zwei vertikal verschiebbare spiegelnde Wände W_1 und W_2, welche durch einen Stab fest miteinander verbunden sind.

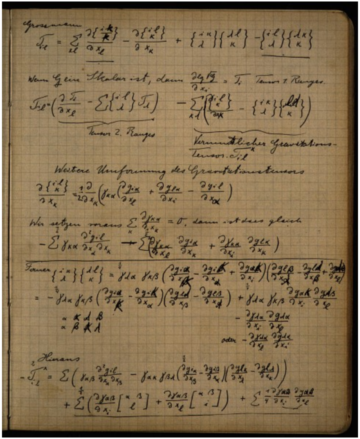
In diesem Falle beträgt die schwere Masse $\int P d\tau$ des beweglichen Systems nur den dritten Teil des Wertes, der bei einem als Ganzes beweglichen Kasten auftritt. Man würde also zum Emporheben der Strahlung entgegen einem Schwerefelde nur den dritten Teil der Arbeit aufwenden müssen als in dem vorhin betrachteten Falle, daß die Strahlung in einem Kasten eingeschlossen ist. Dies erscheint mir unannehmbar.

Ich muß freilich zugeben, daß für mich das wirksamste Argument dafür, daß eine derartige Theorie zu verwerfen sei, auf der Überzeugung beruht, daß die Relativität nicht nur orthogonalen linearen Substitutionen gegenüber besteht, sondern einer viel weiteren Substitutionsgruppe gegenüber. Aber wir sind schon deshalb nicht berechtigt, dieses Argument geltend zu machen, weil wir nicht imstande waren, die (allgemeinste) Substitutionsgruppe ausfindig zu machen, welche zu unseren Gravitationsgleichungen gehört.

Das „Zürcher Notizbuch“



p. 11 L



p. 22 R

Der „Durchbruch zur Wahrheit“ (25. November 1915)

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\rho \\ l \end{Bmatrix} \tag{1a}$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix} \tag{1b}$$

[1] Sitzungsber. XLIV, S. 778 und XLVI, S. 799, 1915.

Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen des Gravitationsfeldes in Räumen, in denen »Materie« fehlt, erhalten wir, indem wir ansetzen

$$G_{im} = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß $\sqrt{-g} = 1$ ist. Dann verschwindet S_{im} wegen (1b), so daß man statt (2) erhält

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^\rho_{il}\Gamma^l_{m\rho} = 0 \tag{3}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Dabei ist

$$\Gamma^l_{im} = -\begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix} \tag{4}$$

gesetzt, welche Größen wir als die »Komponenten« des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right), \tag{2a}$$

wobei

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_\sigma T^\sigma_\sigma = T \tag{5}$$

gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma^\rho_{il}\Gamma^l_{m\rho} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \tag{6}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde (Impulsenergiesatz). Bei der Spezialisierung der Koordinatenwahl gemäß (3a) kommt dies darauf hinaus, daß die T_{im} die Bedingungen

$$\sum_\lambda \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_{\mu\nu} \tag{7}$$

oder

$$\sum_\lambda \frac{\partial T^\lambda_\sigma}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\nu_\mu \tag{7a}$$

erfüllen sollen.

Der „Durchbruch zur Wahrheit“ (25. November 1915)

Multipliziert man (6) mit $\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\sigma}$ und summiert über i und m, so erhält man[1] mit Rücksicht auf (7) und auf die aus (3a) folgende Relation

$$\frac{1}{2}\sum_{im} g_{im}\frac{\partial g^{im}}{\partial x_\sigma} = -\frac{\partial\, lg\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = 0$$

den Erhaltungssatz für Materie und Gravitationsfeld zusammen in der Form

$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T^\lambda_\sigma + t^\lambda_\sigma) = 0, \qquad (8)$$

wobei t^λ_σ (der »Energietensor« des Gravitationsfeldes) gegeben ist durch

$$\varkappa t^\lambda_\sigma = \frac{1}{2}\delta^\lambda_\sigma \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \sum g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \qquad (8a)$$

Die Gründe, welche mich zur Einführung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (2a) und (6) veranlaßt haben, erhellen erst aus den folgenden Überlegungen, welche den an der soeben angeführten Stelle (S. 785) gegebenen völlig analog sind.

Multiplizieren wir (6) mit g^{im} und summieren wir über die Indizes i und m, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa(T+t) = 0, \qquad (9)$$

wobei entsprechend (5) zur Abkürzung gesetzt ist

$$\sum_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} t_{\varrho\sigma} = \sum_\sigma t^\sigma_\sigma = t. \qquad (8b)$$

Man beachte, daß es unser Zusatzglied mit sich bringt, daß in (9) der Energietensor des Gravitationsfeldes neben dem der Materie in gleicher Weise auftritt, was in Gleichung (21) a. a. O. nicht der Fall ist.

Ferner leitet man an Stelle der Gleichung (22) a. a. O. auf dem dort angegebenen Wege mit Hilfe der Energiegleichung die Relationen ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa(T+t)\right] = 0. \qquad (10)$$

Unser Zusatzglied bringt es mit sich, daß diese Gleichungen gegenüber (9) keine neue Bedingung enthalten, so daß über den Energie-

[1] Über die Ableitung vgl. Sitzungsber. XLIV, 1915, S. 784/785. Ich ersuche den Leser, für das Folgende auch die dort auf S. 785 gegebenen Entwicklungen zum Vergleiche heranzuziehen.

tensor der Materie keine andere Voraussetzung gemacht werden muß als die, daß er dem Impulsenergiesatze entspricht.

Damit ist endlich die allgemeine Relativitätstheorie als logisches Gebäude abgeschlossen. Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt. Dagegen vermag das allgemeine Relativitätspostulat uns nichts über das Wesen der übrigen Naturvorgänge zu offenbaren, was nicht schon die spezielle Relativitätstheorie gelehrt hätte. Meine in dieser Hinsicht neulich an dieser Stelle geäußerte Meinung war irrtümlich. Jede der speziellen Relativitätstheorie gemäße physikalische Theorie kann vermittels des absoluten Differentialkalkuls in das System der allgemeinen Relativitätstheorie eingereiht werden, ohne daß letztere irgendein Kriterium für die Zulässigkeit jener Theorie lieferte.

Newton

- Potential (Feld)

  ϕ (1 Komponente)

- Feldgleichung (1)

  $$\Delta\Phi = 4\pi G\,\rho$$

- Bewegungsgleichungen für Testmasse

  $$\ddot{\vec{x}}(t) = -\vec{\nabla}\Phi\big(\vec{x}(t)\big)$$

- Abweichung von Trägheitsbewegung: Gravitation ist eine Kraft.

Einstein

- Potential (Feld)

  $g_{\mu\nu}$ (10 Komponenten)

- Feldgleichungen (10)

  $$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}$$

- Bewegungsgleichungen für Testmasse

  $$\ddot{x}^{\lambda}(\tau)+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\big(x(\tau)\big)\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\mu}(\tau) = 0$$

- Reine Trägheitsbewegung: Gravitation ist *keine* Kraft (im Newton'schen Sinne).

Die 10 Quellen und Potentiale des Gravitationsfeldes

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} W & S^n/c \\ \hline G^m \cdot c & \Sigma^{mn} \end{array} \right) \qquad \begin{cases} W & : \text{Energiedichte} \\ S^n & : \text{Energie-Stromdichte} \\ G^m & : \text{Impulsdichte} \\ \Sigma^{mn} & : \text{Impuls-Stromdichte} \end{cases}$$

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -1 + 2\Phi/c^2 & J_n \\ \hline J_m & \delta_{mn} + H_{mn} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} \Phi & : \text{Newton'sches Potential} \\ J_n & : \text{Vektorpotential (Gravitomagnetismus)} \\ H_{mn} & : \text{Gravitationswellen} \end{cases}$$

Schluss

„Was Sie an Ihrem Standpunkt agnostisch nennen, ist auch bei mir vertreten, und zwar in der Form: Mögen wir aus der Natur nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit einen Komplex herausheben, wie wir wollen, nie wird seine theoretische Behandlung sich als endgültig zutreffend (genügend) erweisen. Newtons Theorie z.B. stellt das Gravitationsfeld scheinbar vollständig dar durch das Potential φ. Diese Beschreibung erweist sich als ungenügend; es treten die Funktionen $g_{\mu\nu}$ an die Stelle. Aber ich zweifle nicht, dass einmal der Tag kommen wird, an dem auch diese Auffassungsweise einer prinzipiell anderen wird weichen müssen, aus Gründen, die wir heute noch nicht ahnen. Ich glaube, dass dieser Prozess der Vertiefung der Theorie keine Grenzen hat.“

A.E. an Felix Klein, April 1917

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Geduld!

Schluss

„Was Sie an Ihrem Standpunkt agnostisch nennen, ist auch bei mir vertreten, und zwar in der Form: Mögen wir aus der Natur nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit einen Komplex herausheben, wie wir wollen, nie wird seine theoretische Behandlung sich als endgültig zutreffend (genügend) erweisen. Newtons Theorie z.B. stellt das Gravitationsfeld scheinbar vollständig dar durch das Potential φ. Diese Beschreibung erweist sich als ungenügend; es treten die Funktionen $g_{\mu\nu}$ an die Stelle. Aber ich zweifle nicht, dass einmal der Tag kommen wird, an dem auch diese Auffassungsweise einer prinzipiell anderen wird weichen müssen, aus Gründen, die wir heute noch nicht ahnen. Ich glaube, dass dieser Prozess der Vertiefung der Theorie keine Grenzen hat.“

A.E. an Felix Klein, April 1917

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und Geduld!